19/3/21

Παρατήρηση: Αν $z_n \to \infty$, τότε εξ' ορισμού $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$: $|z_n| \neq 0$ [Αν υπάρχει υπακολουθία $(z_{k_n}) \subset (z_n)$ με $z_{k_n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε η z_n δεν υπάρχει περίπτωση να συγκλίνει στο ∞].

Άρα: για $(z_n) \subset \mathbb{C}$ με $z_n \in \mathbb{C}^*$ $\forall n \geq n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$ ισχύει:
$z_n \to \infty \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \to 0$
$\frac{1}{z_n} \in \mathbb{C}^*$ $\forall n \geq n_1$

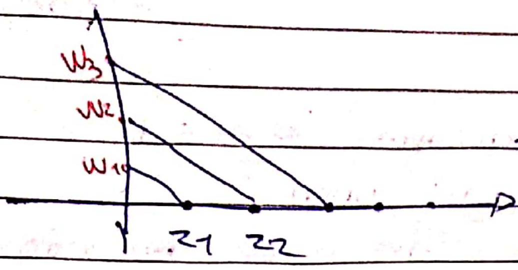
• Σε μία πιο απλή θεώρηση μπορούμε να πούμε ότι αφού γράφουμε $\frac{1}{z_n}$ "εννοείται" ότι $\frac{1}{z_n} \in \mathbb{C}$, δηλ. $z_n \neq 0$ (αυτό είναι φυσικά κάπως άτυπο, αλλά στηρίζεται στο ότι στα μαθηματικά δεν γράφουμε πράγματα τα οποία δεν είναι "καλώς ορισμένα")

• Πιο απλά: Για $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$ ισχύει: $z_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \to 0$ [$\Rightarrow$ Το ∞ είναι ο αντίστροφος του 0.]

« $\frac{1}{\infty} = 0$ »

Παρατήρηση: Από τον ορισμό το $z_n \to \infty$ εξαρτάται αποκλειστικά από τη συμπεριφορά του $|z_n|$. Έτσι $z_n = (-1)^n n \to \infty$, αφού $|z_n| = n \to +\infty$ ενώ η απόσταση μεταξύ των z_{n+1} και z_n
$|z_{n+1} - z_n| = |(-1)^{n+1}(n+1) - (-1)^n n| = |(-1)^n|\,|(-1)(n+1) - n| = |-n-1-n| = |-2n-1| = 2n+1 > 2n \to +\infty$ συνεχώς αυξάνει. Δηλ. έχουμε μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στο "ίδιο" αντικείμενο (το ∞) ενώ η απόσταση μεταξύ 2 διαδοχικών όλο και μεγαλώνει.

Καλύτερο παράδειγμα: Έστω οι 2 ακολουθίες $z_n = n \to \infty$ και $w_n = in \to \infty$, και οι 2 "πάνε" στο ίδιο "σημείο", το ∞ ενώ μεταξύ τους απομακρύνονται στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$: $|z_n - w_n| = |n - in| = n|1-i| = n\sqrt{2} \to +\infty$

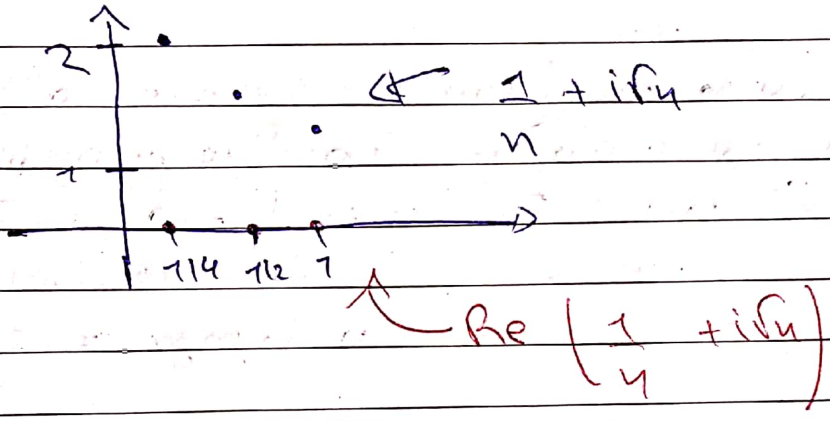


Γεωμετρικά - διαισθητικά:
« "μαζεύουμε" όλο το "άπειρο" του $\mathbb{C}$: [... τα πέρατα του κόσμου...] σ' ένα "σημείο", το ∞ »

Παραδείγματα: α) $\frac{1}{n} + i\sqrt{n} \to \infty \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} + i\sqrt{n}\right| \to +\infty$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n^2} + n\right)^{1/2} \to +\infty$ αφού $\frac{1}{n^2} + n > n \xRightarrow{\sqrt{\cdot}\,:\text{ αύξουσα}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n^2} + n\right)^{1/2} > n^{1/2} \to +\infty$



$w_n = (-1)^n \sqrt[4]{n} - i^n \sqrt[3]{n} \to \infty$: αφού:

$|w_n| \geq \Big|\, \underbrace{|(-1)^n \sqrt[4]{n}|}_{=\sqrt[4]{n} \to 1} - \underbrace{|i^n \sqrt[3]{n}|}_{=\sqrt[3]{n} \to +\infty} \,\Big|$

$= \sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n}$, όπου $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0 \geq \underbrace{\sqrt[3]{n}}_{\to +\infty} - 2 \to +\infty$

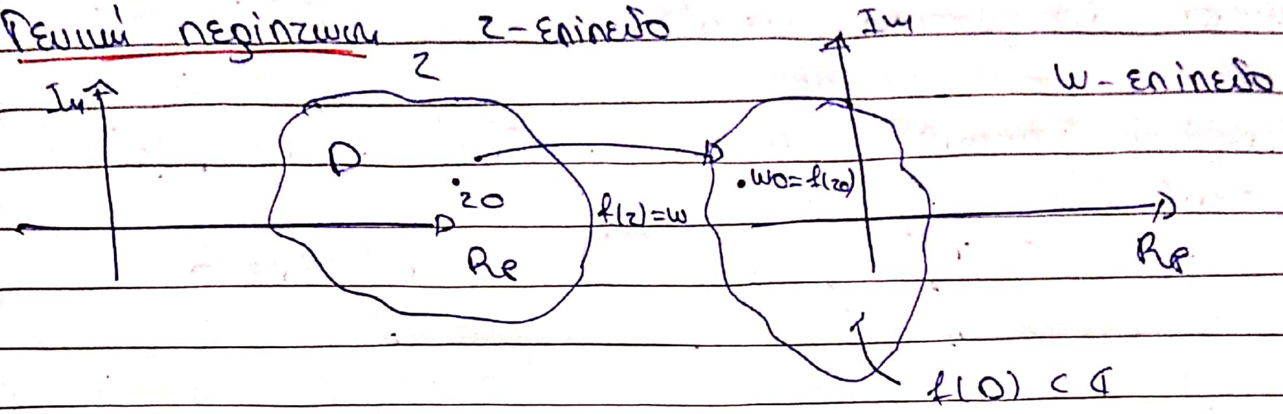
$\sqrt[4]{n} \leq 2$

$-\sqrt[4]{n} \geq -2$ (βλ. A-36)

§2.3 Μιγαδικές Συναρτήσεις

$f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$

Γενική περίπτωση   z-επίπεδο

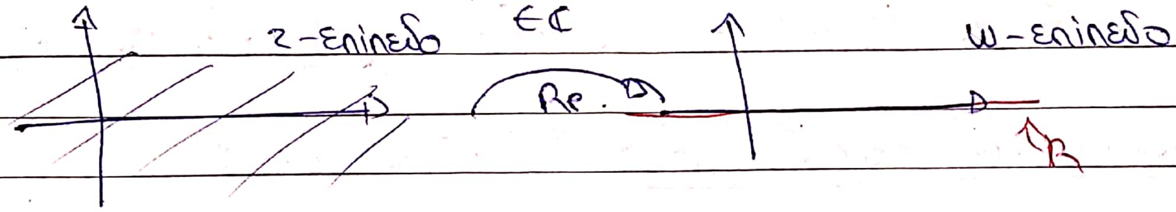


Ειδικές περιπτώσεις: πραγματική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής

$f: D \to \mathbb{C}$ με $f(D) \subset \mathbb{R}$ ή αλλιώς $f: D \to \mathbb{R}$ [$D \subset \mathbb{C}$]

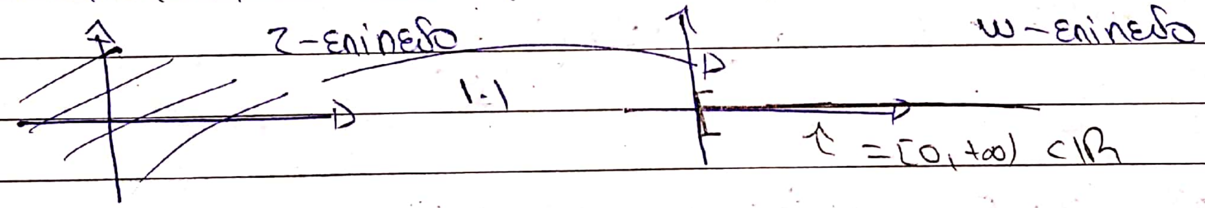
π.χ.

$Re: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\underset{\in \mathbb{C}}{z} \longmapsto Re\, z \in \mathbb{R}$



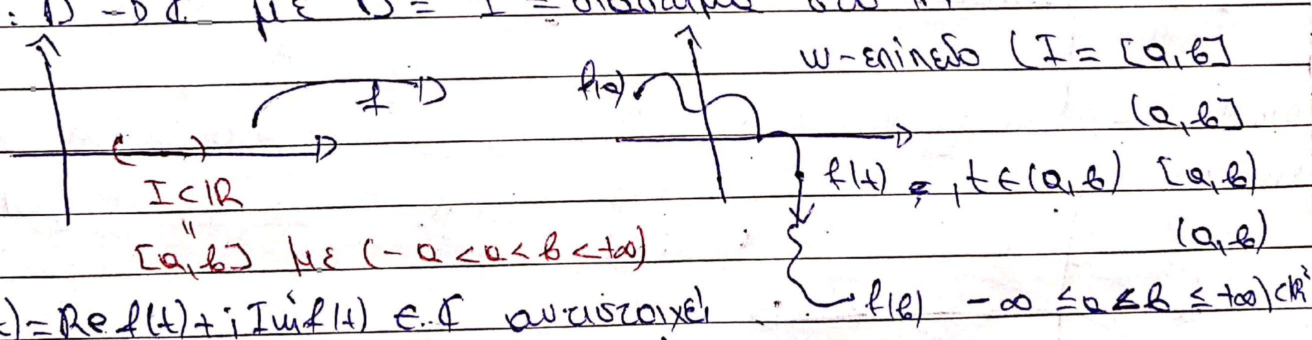
Άλλο παράδειγμα: 1-1 : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $|z| \in [0, +\infty)$

$f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$, $f(\mathbb{C}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$



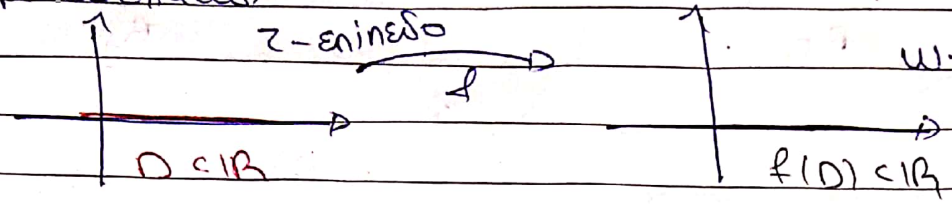
Άλλη ειδική περίπτωση: $\boxed{\text{καμπύλες στο } \mathbb{C}}$

$f: D \to \mathbb{C}$ με $D = I =$ διάστημα στο $\mathbb{R}$



$f(t) = Re\, f(t) + i\, Im\, f(t) \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί στην καμπύλη $(Re\, f(t), Im\, f(t))$

Τέλος και μία $f: D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$ δηλ. πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής (εννοείται: μίας) αναφέρεται στις τιμές μπορεί να θεωρηθεί και ως μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικής μεταβλητής)



π.χ. $f(x) = e^x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ (*) $\to$

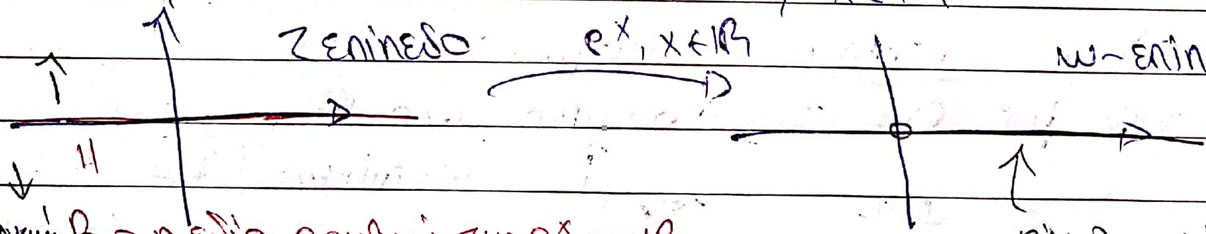
(*) Αυτό που μας ενδιαφέρει - τουλ. για βασικές συναρτήσεις - πολλές φορές στη Μ.Α. είναι η επέκταση πραγμ. συνάρτησης πραγμ. συνεχ. σε (μιγαδικές) συναρτήσεις μιγαδικής συνεχ. μεταβ.

Σημαντικότερα παραδείγματα (1) e^z, $z \in \mathbb{C}$

(2) $\log z$, $z \in \mathbb{C}^*$ [(3) τριγωνομετρικές συναρτήσεις π.χ. $\sin z$, $\cos z$, ...

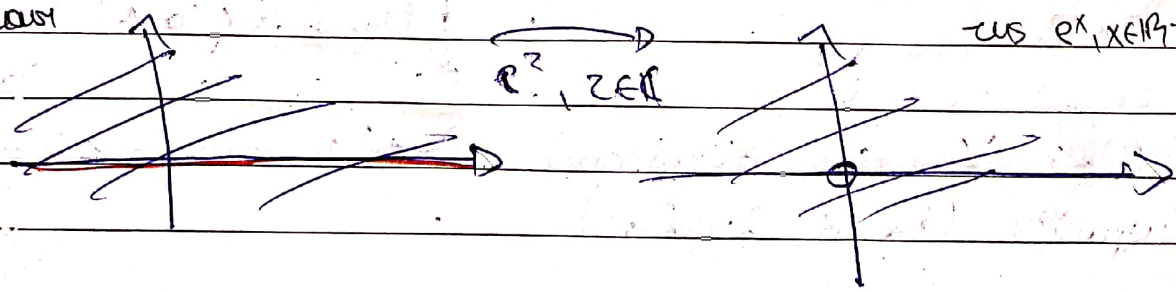
όπου $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \underset{y=0}{=} e^x$

Η e^z, $z \in \mathbb{C}$ επεκτείνει την e^x, $x \in \mathbb{R}$



αναλυτικά $\mathbb{R}$ = πεδίο ορισμού της e^x, $x \in \mathbb{R}$. σύνολο (όχι πεδίο της e^x, $x \in \mathbb{R}$ τιμών)

επέκταση



Στη γενική, τυπική περίπτωση

$D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \ni \underset{\overset{\parallel}{x+iy}}{z} \mapsto f(z) = Re\left[\underset{\overset{\parallel}{x+iy}}{f(z)}\right] + i\, Im\left[\underset{\overset{\parallel}{x+iy}}{f(z)}\right] \in \mathbb{C}$$

Όπως με την αντιστοίχιση $z = x+iy = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και την αντιστοίχιση $f(z) = Re f(z) + i\, Im f(z) = (Re f(z), Im f(z)) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε 1 1-1 και επί αντιστοίχιση της:

f με $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Re f(x+iy) \\ Im f(x+iy) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Όπου σε κάθε μιγαδική συνάρτηση $f(z)$, $z \in D$ αντιστοιχεί μοναδικό ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Re f(x+iy) \\ Im f(x+iy) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Επίσης ορίζουμε και τις πραγματικές συναρτήσεις:

πραγματικό μέρος της f: $z \underset{Ref}{\longmapsto} Re[f(z)] =: (Ref)(z)$

(Δεν παίζει ρόλο πως βάζουμε τις παρενθέσεις, γράφουμε: $Re f(z)$ $[= Re[f(z)] = (Re f)(z)]$)

Αντίστοιχα για το φανταστικό μέρος της f

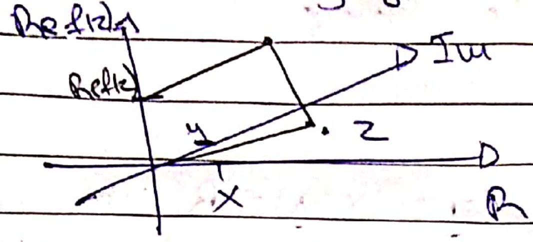
$Im f(z) = (Im f)(z) := Im[f(z)]$, $z \in D \subset \mathbb{C}$

Άρα: $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$

Στην ειδική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιγ. ανεξ. μεταβλ. έχουμε: $z \mapsto f(z) \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί σε:

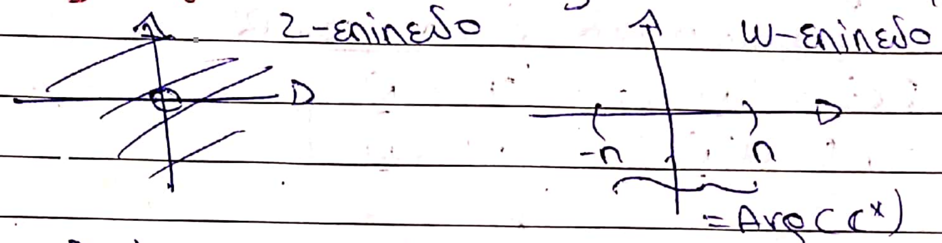
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Re f(x+iy) \\ Im f(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+iy) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Τέτοιες συναρτήσεις μπορούμε φυσικά να τις σχεδιάσουμε όπως και πραγμ. συναρτήσεις 2 ανεξ. πραγμ. μεταβλ.



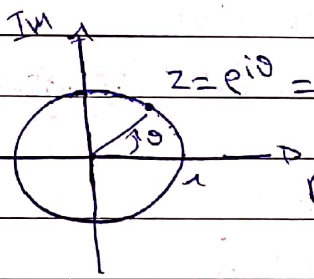
Μια συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ λέγεται φραγμένη αν το $f(D) \subset \mathbb{C}$ είναι φραγμένο, δηλ. αν $\exists\, c > 0$: $|f(z)| < c \quad \forall z \in D$

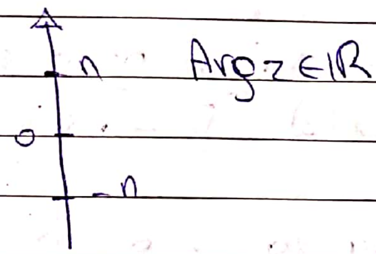
Παράδειγμα: $z \mapsto \mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{C}^\times$.

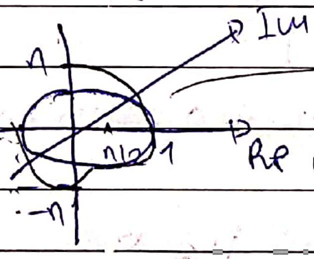


Ας δούμε $z \in \mathbb{C}^\times$ με $|z| = 1$ τότε $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$

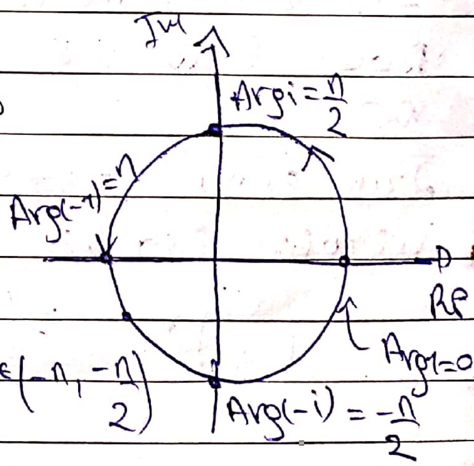
$\theta = \mathrm{Arg}\, z$







→ Ατυχής προσπάθεια αναπαράστασης της καμπύλης $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, \theta) \in \mathbb{R}^3$
$= (z, \mathrm{Arg}\, z)$, $|z| = 1$

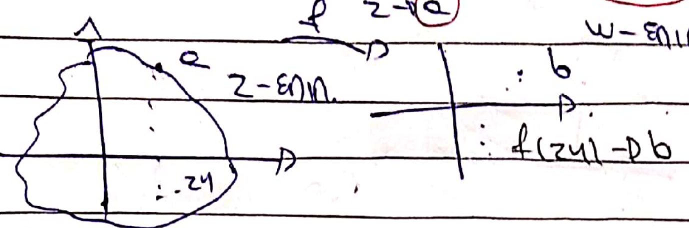


$\theta \downarrow -\pi$

$\mathrm{Arg}(e^{i\theta}) = \theta \downarrow -\pi$

Όρια συναρτήσεων: Έστω $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ και $a \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του D (δηλ. $\exists\, (z_n) \subset D \setminus \{a\}$ με $z_n \to a$)

Τότε λέμε ότι $\lim_{z \to a} f(z) = b \in \mathbb{C} \iff \forall\, (z_n) \subset D \setminus \{a\}$ με $z_n \to a$: $f(z_n) \to b$



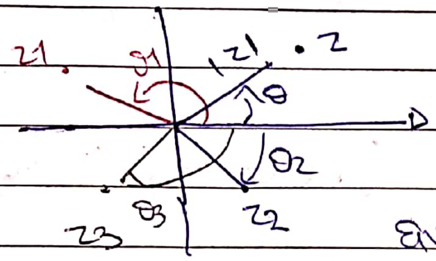
Εδώ $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$

Αυτό αντιστοιχεί με $\lim_{(x,y) \to (a_1,a_2)} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ για $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$

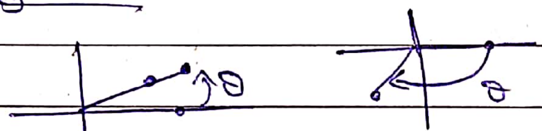
και $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ με: $(u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$

$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

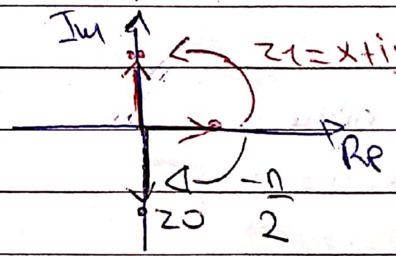
Απορίες !!! • Τι είναι το κύριο όρισμα?



$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z| e^{i\theta}$ με $\theta \in (-\pi, \pi]$ το $\boxed{\theta = \operatorname{Arg} z}$ είναι η γωνία μεταξύ του θετικού ημιάξονα των πραγματικών και του διανύσματος: $z = x + iy = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ η οποία είναι θετική και ξεκινάει από τον θετ. ημιάξονα των πραγμ.

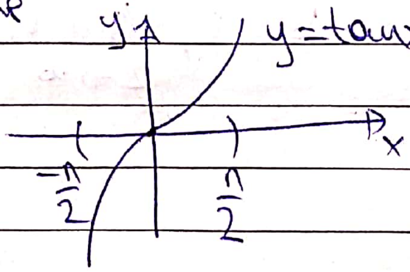


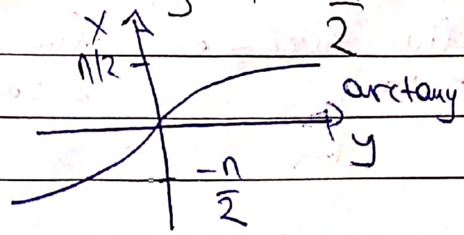
$z = x$, $x \in (0, \infty)$



$z_1 = x + iy$, $x = 0$, $y > 0$ $\quad \theta \in (-\pi, \pi]$: $\operatorname{Arg} x = 0$

$z_0 = x + iy$, $x = 0$, $y < 0$ $\quad \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$





$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = \underbrace{|z|\cos(\operatorname{Arg} z)}_{=x} + i\underbrace{|z|\sin(\operatorname{Arg} z)}_{=y}$$

$x \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin(\operatorname{Arg}(z))}{\cos(\operatorname{Arg} z)} = \tan(\operatorname{Arg} z) \Rightarrow \arctan\frac{y}{x} = \operatorname{Arg} z$$

$$\boxed{\operatorname{Arg} z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$